CONCOURS COMMUN MINES, PONTS,.. 1977

OPTION M - 2EME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

(DUREE : 4 HEURES)

L'énoncé de cette épreuve, spécifique aux candidats de l'option M, comporte 3 pages.

Il est demandé expressément aux candidats de donner des démonstrations précises et rigoureuses. Aucun raisonnement vague ou insuffisant ne sera pris en considération par le correcteur.

K désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On donne une application continue ϕ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et l'on note E_K l'espace vectoriel sur K des solutions à valeurs dans K de l'équation différentielle

$$(1) \quad y'' + \phi(x)\, y = 0 \ ,$$

c'est-à-dire des applications deux fois dérivables y de $\mathbb{R}$ dans K qui vérifient :

$$y''(x) + \phi(x)\, y(x) = 0 \quad \text{pour tout réel } x \ .$$

On rappelle que, si x est réel, l'application $u \longmapsto (u(x), u'(x))$ de E_K dans K^2 est bijective.

PARTIE I

1°) Montrer que, si (u_1, u_2) est une base de $E_{\mathbb{R}}$, (u_1, u_2) est une base de $E_{\mathbb{C}}$.

2°) Soit (u,v) un élément de E_K^2. On note $C_{(u,v)}$ (plus simplement : $C_{u,v}$) l'application de $\mathbb{R}$ dans K définie par : $C_{u,v}(x) = u(x)\, v'(x) - u'(x)\, v(x)$.

(a) - Montrer que $C_{u,v}$ est constante.

(b) - Que dire de l'application $\Delta : (u,v) \longrightarrow C_{u,v}(0)$ de E_K^2 dans K ?

(c) - A quelle condition nécessaire et suffisante (portant sur (u,v)) a-t'on :

$C_{u,v}(0) \neq 0$?

3°) Montrer que les éléments de $E_{\mathbb{R}}$ qui ne s'annulent pas sont exactement les fonctions de la forme $\varepsilon\, e^f$, où f est une application deux fois dérivables de $\mathbb{R}$ dans K vérifiant :

$$f''(x) + [f'(x)]^2 + \phi(x) = 0 \text{ pour tout réel } x, \text{ et : } |\varepsilon| = 1 \ .$$

4°) Si u appartient à E_K, et ne s'annule pas, montrer que (u,v) est une base de E_K,

où v est l'application : $x \longmapsto u(x) \cdot \displaystyle\int_0^x \frac{1}{[u(t)]^2}\, dt$ de $\mathbb{R}$ dans K .

5°) On considère une application de classe C^2, strictement monotone ψ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telle que : $\phi \circ \psi = \phi$. On note, pour u dans E_K , $L_{K,\psi}(u)$, l'application : $x \longmapsto u(\psi(x))$ de $\mathbb{R}$ dans K. On envisage les énoncés :

(A) $(\forall\, u \in E_K)\ (L_{K,\psi}(u) \in E_K)$

(B) ψ est une isométrie de $\mathbb{R}$ (i.e. $(\forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^2)\ (|\psi(x) - \psi(y)| = |x - y|)$).

. . . /. . .

Montrer que (B) implique (A). Montrer que (A) implique (B) dès que ϕ n'est pas la fonction nulle. Montrer enfin que, si (B) est vérifié, l'application $L_{K,\psi} : u \to L_{K,\psi}(u)$ de E_K dans lui-même est un isomorphisme linéaire, qui vérifie : dét $(L_{K,\psi}) = \psi'(0)$.

6°) On dit qu'une base (u_1,u_2) de E_K est <u>adaptée</u> si u_1 est paire, u_2 est impaire.

(a)- Si (u_1,u_2) est une base adaptée de E_K, montrer que les bases adaptées de E_K sont exactement les bases $(\lambda_1 u_1 , \lambda_2 u_2)$ avec λ_1,λ_2 dans $K - \{0\}$.

(b)- Montrer que, si E_K admet une base adaptée, ϕ est paire.

(c)- On suppose réciproquement que ϕ est paire. Montrer que E_K admet une base adaptée. [On pourra, soit raisonner directement, soit considérer l'application L_{K,ψ_0} , où ψ_0 est l'application : $x \longmapsto -x$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$].

(d)- Déterminer toutes les bases adaptées de $E_{\mathbb{R}}$ dans les cas suivants :

(i) ϕ est constante, prenant la valeur réelle k .

(ii) ϕ est la fonction $x \longmapsto -1 - x^2$.

(iii) ϕ est la fonction $x \longmapsto \cos^2 x + \cos x - 1$.

PARTIE II

Dans cette partie : on suppose ϕ périodique de période 1 ; on dit qu'un élément u de E_K est <u>pseudo-périodique</u> s'il existe un élément λ de K tel que : $u(x+1) = \lambda\, u(x)$ pour tout réel x ; on dit que <u>ϕ vérifie la condition (S)</u> si 0 est le seul élément pseudo-périodique de $E_{\mathbb{R}}$.

1°) (a)- Si $\beta = (u_1,u_2)$ est une base de $E_{\mathbb{R}}$, on note, pour x réel, $U_\beta(x)$ la matrice

$$\begin{pmatrix} u_1(x) & u_2(x) \\ u'_1(x) & u'_2(x) \end{pmatrix}$$

Montrer que la matrice $M_\beta = [\,U_\beta(x)\,]^{-1} . U_\beta(x+1)$ est une matrice de déterminant 1, indépendante de x .

(b)- Avec les mêmes notations, quel lien y a-t-il entre M_β et l'endomorphisme L_{K,ψ_1} , où ψ_1 est l'application $x \longmapsto x+1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?

(c)- Montrer l'équivalence :

ϕ vérifie la condition (S) $\Longleftrightarrow$ Les valeurs propres dans $\mathbb{C}$ de L_{K,ψ_1} sont de la forme

$$e^{+i\theta} , e^{-i\theta} , \text{ avec } \theta \text{ dans } \mathbb{R} - \pi\mathbb{Z} .$$

En déduire que, si ϕ vérifie la condition (S), tout élément de E_K est borné.

2°) Soient a,b des réels vérifiant : $a < b$, h une application deux fois dérivable de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ tels que : $h(x) \cdot h''(x) = 0$ pour tout x dans $[a,b]$.

(a)- Montrer que $F = \{ x \in [a,b] \mid h(x) = 0 \}$ est un intervalle fermé de $[a,b]$.

(b)- En envisageant différents cas, montrer que h est une fonction affine sur $[a,b]$.

. . . / . . .

3°) Soient a,b des réels vérifiant : $a < b$, w une application de classe C^2 de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ tels que :

$$(U)\quad \begin{cases} (1) & w(a) = w(b) = 0 \\ (2) & (\forall x \in]a,b[\,)\ (w(x) > 0) \\ (3) & \text{L'intégrale } I = \displaystyle\int_a^b \frac{|w''(x)|}{w(x)}\,dx \text{ converge.} \end{cases}$$

On pose $M = \sup_{x \in]a,b[} w(x)$

(a) - Montrer l'inégalité : $I \geqslant J = \frac{1}{M} \cdot \sup_{a < x_1 < x_2 < b} |w'(x_2) - w'(x_1)|$.

(b) - En utilisant II - 2°), montrer que l'on a en fait : $I > J$. (On conseille de raisonner par l'absurde, et de considérer alors une fonction h convenable).

(c) - Soit c élément de $]a,b[$ tel que $M = w(c)$. A l'aide de (b) et de réels x_1, x_2 (avec : $x_1 \in]a,c[$, $x_2 \in]c,b[$) bien choisis, montrer :

$$(b-a) \cdot I > 4 .$$

4°) On suppose dans cette question : $\displaystyle\int_0^1 \phi(x)\,dx > 0$. Montrer qu'un élément pseudo-périodique u de $E_{\mathbb{R}}$ s'annule sur $[0,1]$. (On conseille de raisonner par l'absurde, et de considérer alors la fonction : $v = \frac{u'}{u}$).

5°) On suppose dans cette question : $0 < \displaystyle\int_0^1 \phi(x)\,dx \leqslant 4$, et ϕ à valeurs positives. Montrer, en utilisant les questions précédentes, que tout élément de $E_{\mathbb{R}}$ est borné.

ooooo
ooooo

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail